

2019

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$
তলত দিয়া প্রশ্নোৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the n -th derivative of $y = e^{ax+b}$?

$y = e^{ax+b}$ -এ n -তম অৱকলজ কি ?

(b) What is the solution of the differential
equation?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4$$

অৱকলনীয় সমীকৰণ $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$ -এ সমাধানটো কি ?

(2)

- (c) Write the reduction formula for
 $\int \sin^n x dx$.

$\int \sin^n x dx$ বর লম্বুকবণ সূত্রটো লিখা।

- (d) Is the sum of two continuous functions also continuous?

দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফলটো অবিচ্ছিন্ন নে ?

- (e) What is the value of $\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos x) dx$?

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos x) dx$ বর মান কি ?

- (f) Write down the Taylor's infinite series for a function.

এটা ফলনৰ টেইলৰ অসীম শ্রেণীটো লিখা।

- (g) Write down the Leibnitz's theorem.

লেবনিজৰ উপগাদ্যটো লিখা।

(3)

- (h) Find the value of

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ বর মান নির্ণয় কৰা।

- (i) What do you mean by homogeneous functions?

সূষম ফলন বুলিলে তুমি কি বুজা ?

- (j) Find the differential equation for
 $y = 2x + 1$.

$y = 2x + 1$ বৰ বাবে অবকলনীয় সমীকৰণটো নির্ণয় কৰা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the asymptotes parallel to x -axis of the curve $x^2 y^2 - a^2 (x^2 + y^2) = 0$.

বক্ষ $x^2 y^2 - a^2 (x^2 + y^2) = 0$, x -অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পর্শক নির্ণয় কৰা।

(4)

- (b) Evaluate :

মান উলিওৱা :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x \, dx$$

- (c) Find the n -th derivative of $y = \log(ax + b)$.

$y = \log(ax + b)$ -এ n -তম অবকলজটো নির্ণয় কৰা।

- (d) Find the degree and order of the differential equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = x^2$$

অবকলনীয় সমীকৰণ

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = x^2$$

-ৰ ঘাত আৰু ক্রম নির্ণয় কৰা।

- (e) State the Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমানৰ উপপাদ্যটো বৰ্ণনা কৰা।

(5)

3. Answer any four questions of the following :

$5 \times 4 = 20$

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) State and prove Euler's theorem for two variables.

দুটা চলকবিশিষ্ট অইলাৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

- (b) Find the maximum and minimum values of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$ -এ গুৰিষ্ঠ আৰু লাখিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) If (যদি) $y = \sin^{-1} x$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(i) (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$$

$$(ii) (1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

- (d) Find the radius of curvature at the point

$$x = \frac{\pi}{2}$$

of the curve $y = 4 \sin x - \sin 2x$.

$y = 4 \sin x - \sin 2x$ বক্র, $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুত বক্রতাৰ ব্যাসাৰ্থ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Solve :

সমাধান করা :

$$(i) (D^2 + 4)y = x^2$$

Or / অথবা

$$(ii) (D^2 + 6D + 5)y = 16e^{3x}$$

(f) If a particle is moving along a line such that its acceleration is equal to the displacement of the particle at any time, then find its velocity and displacement at that time.

যদি এটা কণাই এডাল বেখাত এনেদেবে গতি কৰিছে
যাতে ইয়াৰ ভৱণ যি কোনো সময়ত কণাটোৰ স্থান
পৰিবৰ্তনৰ সমান হয়, তেন্তে কণাটোৰ সেই সময়ত বেগ
আৰু স্থান নিৰ্ধাৰণ কৰা।

4. Answer any four questions from the following : $10 \times 4 = 40$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰ পৰা যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) If $y = \tan^{-1} x$, then prove by using Leibnitz's theorem

$$(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

যদি $y = \tan^{-1} x$, তেন্তে লেৱিজৰ উপপাদ্যটো
ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

(ii) Verify Cauchy's mean value theorem for the functions $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ over $[1, 2]$.

$[1, 2]$ ত, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ ফলন-
কেইটাৰ কটিৰ মধ্যমানৰ উপপাদ্যটো পৰীক্ষা
কৰা।

(b) (i) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$

(ii) If

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

যদি

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(8)

- (c) (i) Examine the continuity at $x = 0$ for the function

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \\ = 0 \quad , \quad x = 0$$

$x = 0$ বিন্দুত ফলনটো অবিছিমতা পরীক্ষা কৰা

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \\ = 0 \quad , \quad x = 0$$

- (ii) Find the equation of tangent at point (x, y) of the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

(x, y) বিন্দুত $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্রৰ স্পর্শকৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) (i) Find the radius of curvature of the curve $x^2 = 4y$ at the vertex.

শীৰ্ষ বিন্দুত $x^2 = 4y$ বক্রৰ, বক্রতাৰ ব্যাসাধ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the asymptotes parallel to the axes of the curve

$$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0$$

$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0$ বক্রৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল অন্তস্পর্শক নিৰ্ণয় কৰা।

20A/77

(Continued)

(9)

- (e) (i) Find the reduction formula for

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো উলিওৱা।

- (ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (a < c < b)$$

- (f) (i) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

$$x^2 + y^2 = a^2$$
 বৃত্তৰ কালি উলিওৱা।

- (ii) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(D^2 - 2D + 4) y = e^x \cos x$$

Or / অথবা

$$(D^2 - 4D + 4) y = x^3 e^{2x}$$

20A/77

(Turn Over)

(10)

(g) (i) Solve :

সমাধান করা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \sin 2x$$

Or / অথবা

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(ii) Find the differential equation by
eliminating constants a, b from
 $y = ax + bx^2$.

$y = ax + bx^2$ -র পরা ফরক a, b অপনয়ন করি
অবকলনীয় সমীকরণটো নির্ণয় করা।

(h) Solve (any two) :

সমাধান করা (যি কোনো দুটা) :

$$(i) x \frac{dy}{dx} + y = x^3$$

$$(ii) (x^2 - y^2) dx + xy dy = 0$$

20A/77

(Continued)

(11)

$$(iii) y(2xy + e^x) dx = e^x dy$$

$$(iv) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$$

★ ★ ★

20A—10*/77

3 (Sem-3) MAT